Konstruktion eines Wavelets am Beispiel CDF−2,2

wollen Signal in zwei Kanäle aufspalten

der erste Kanal soll möglichst viel Energie erhalten, der zweite möglichst wenig

trenne Signal x[n] in gerade xe[k]=x[2k] und ungerade xo[k]=x[2k+1] Stellen

Annahme: $x[2k+1] \approx (x[2k]+x[2k+2])/2$

=> $xo[k] - (xe[k]+xe[k+1])/2$ ist klein

für alle k: $xo[k] -= (xe[k]+xe[k+1])/2$

Beobachtung: Der Mittelwert aller xe[k] ist ein anderer als der aller x[k]

man könnte fordern, daß der Mittelwert des Signals in xe erhalten bleibt,

dann nämlich kann man ihn auch noch einfach ablesen,

wenn die Kanaltrennung mehrmals hintereinander vorgenommen wird

vorher war Fläche unter der Kurve von 2k bis 2k+2: $(x[2k]+2x[2k+1]+x[2k+2])/2$

unter xe (bei gleicher Skalierung) ist sie: $(x[2k]+x[2k+2])$

die Differenz ist gerade xo[k]

erhöhen jetzt x[2k] und x[2k+2] (xe[k], xe[k+1]) so daß Fläche ausgeglichen wird

Achtung: das erhöht die Fläche in einem Bereich von 2k−2 bis 2k+4

=> $xe[k]+=xo[k]/4$, $xe[k+1]+=xo[k]/4$

oder anders geschrieben: berechne für alle $xe[k]+=(xo[k-1]+xo[k])/4$

Zusammenfassung:

Lifting: Verändere mit Hilfe der Werte eines Kanals Werte des anderen Kanals

mit jedem Lifting−Schritt lassen sich neue Eigenschaften formen

jegliche Folge von Lifting−Schritten ist eindeutig umkehrbar

Drehe dazu Reihenfolge der Lifting−Schritte um und vertausche += mit −=

Filtergrundlagen

nichtrekursives Filter ist linearer Operator der Form:

$(Tx)[n] = \sum_{k=-l..l} h_k \cdot x[n-k]$

x ist Eingangssignal, h_k sind Filterkoeffizienten

intuitiv:

h_k beschreiben unterschiedlich durchlässige Glasscheibe

bündele aus Glasscheibe austretendes Licht

schiebe Glasscheibe über Eingangssignal und zeichne Lichtstärken auf

drei verschiedene gängige Schreibweisen

1. Vektor der Filterkoeffizienten (auch mit negativen Komponenten)
2. Laurent−Polynom in e^{iw} mit Filterkoeffizienten als Koeffizienten
3. Laurent−Polynom in z ($z=e^{iw}$)

Sei h(z) Laurent−Polynom des Filters h, setze $H(w) := h(e^{iw})$

H(w) ist Übertragungsfunktion des Filters h

für die Winkelfrequenz w erhält man durch H(w) eine komplexe Zahl,

deren Amplitude die Abschwächung/Verstärkung und

deren Argument die Phasenverschiebung

der Frequenz w im gefilterten Signal angibt

benutzt man Werte des Eingangssignals als Koeffizienten eines Polynoms f

erhält man mit f(z) die Fouriertransformierte

Operationen auf Filtern

$h(z)+g(z)$	$= H(w)+G(w)$	$= h+g$	überlagere Ergebnisse von h und g
$h(z)\cdot g(z)$	$= H(w)\cdot G(w)$	$= h*g$	führe g nach h aus (vertauschbar)
$h(-z)$	$= H(w+pi)$	$= (h_{-2}, -h_{-1}, h_0, -h_1, h_2, -h_3)$	alternierende Koeffizienten
$h(z^{-1})$	$= h(Conj(z))$	$= Conj(h(z))$	
	$= Conj(H(w))$	$= (h_3, h_2, h_1, h_0, h_{-1}, h_{-2})$	umgekehrte Koeffizienten−Reihenfolge
$h(z^2)$	$= H(2w)$	$= (h_{-2}, 0, h_{-1}, 0, h_0, 0, h_1, 0, h_2, 0, h_3)$	enthält nur gerade Potenzen

$h(z)+h(-z) = s(z^2)$

$h(z)-h(-z) = s(z^2)\cdot z$

$h(z)\cdot h(-z) = s(z^2)$

Laurent−Polynome

Laurent−Polynom für Filter h: $h(z) = \sum_{k=kb..ke} h_k \cdot z^{-k}$

Grad von h: $|h| = k_e - k_b$

Laurent−Polynom genau dann invertierbar, wenn es nur ein Monom ist

Division von h durch g mit Rest r: $h(z)=q(z)\cdot g(z)+r(z)$, mit $|r|<|g|$

Division von Laurent−Polynomen nicht eindeutig, da |r| kleiner als |g| wird,
egal ob h−q·z obere oder untere Koeffizienten von h eliminiert

Berechnung der Wavelet−Koeffizienten

Selbstähnlichkeitsbedingung für Skalierungsfunktionen:

Filtert man Skalierungsfunktion φ mit Filter h,
staucht Ergebnis in Zeit− und streckt in Auslenkungsrichtung um Faktor 2 erhält man wieder φ

$\varphi(t) = 2\cdot \sum_k h_k \cdot \varphi(2t-k)$

$\varphi = 2\cdot(\varphi * h)\downarrow 2$

Berechnen der Skalierungsfunktionen aus Filtern

durch Filter ist zugehörige Skalierungsfunktion eindeutig bestimmt

Skalierungsfunktion erhält man aus Filter über die Iterationsvorschrift (Analogie zu IFS):

$\varphi_{j+1} = 2\cdot(\varphi_j * h)\downarrow 2$

oder als Fouriertransformierte des Produktgrenzwertes

$F(\varphi)(w) = \prod_{j=1..\infty} H(w\cdot 2^{-j})$

Berechnen der Waveletfunktionen aus Filtern

$\psi = 2\cdot(\varphi * g)\downarrow 2$

bisher: Eingangssignal war aus verschobenen Skalierungsfunktionen aufgebaut

zum Berechnen der Wavelet−Koeffizienten wurden Skalarprodukte
mit inversen Skalierungs− und Wavelet−Funktionen gebildet

Skalarprodukte mit verschobenen Funktionen entsprechen Ausgangsdaten eines Filters

erhalten Waveletkoeffizienten aller Ebenen
durch wiederholtes Einsetzen einer Filterverzweigung in den Tiefpass−Kanal

Benötigen für weitere Betrachtungen Skalierungs− und Waveletfunktionen nicht mehr,
nur noch deren erzeugende Filter

Beispiel Haar−Wavelet:

$h(z)=(z^0+z^1)/2$

$g(z)=(z^0-z^1)/2$

Rekonstruktionsbedingung

$$\tilde{h}(z^{-1})\cdot h(z) + \tilde{g}(z^{-1})\cdot g(z) = 2$$

$$\tilde{h}(z^{-1})\cdot h(-z) + \tilde{g}(z^{-1})\cdot g(-z) = 0$$

Zerlegung in Lifting−Schritte

Rekonstruktionsbedingung ausgedrückt mit Modulationsmatrix M

$$M(z)=\begin{pmatrix} h(z) & h(-z) \\ g(z) & g(-z) \end{pmatrix}$$

$$\left(\tilde{h}(z^{-1}) \;\; \tilde{g}(z^{-1})\right)\cdot M(z) = (2 \;\; 0)$$

$$\tilde{M}(z^{-1})^T \cdot M(z) = 2E$$

Damit Gleichungssystem nach inverser Modulationsmatrix auflösbar,

muß Determinante von M Monom sein, o.B.d.A. z^{-1}

=> Einschränkung für Wahl von g in Abhängigkeit von h

Bestimme mit Cramerscher Regel inverse Filter

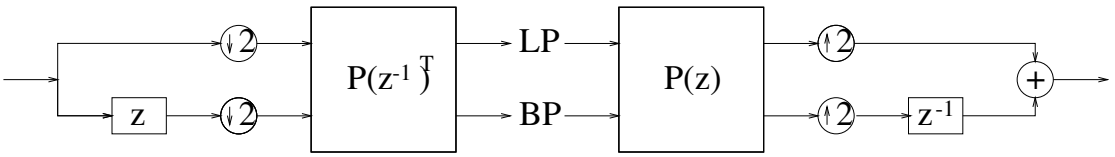
$$\tilde{g}(z) = z^{-1}\cdot h(-z^{-1}),\ \tilde{h}(z) = -z^{-1}\cdot g(-z^{-1})$$

Wie kann man g verändern, so daß das Gleichungssystem weiterhin lösbar bleibt,
d.h. o.B.d.A. die Determinante unverändert bleibt?
Antwort: Es geht genau dann, wenn eine Zeile mit einem Polynom aus geraden Potenzen multipliziert und dann zur anderen Zeile addiert wird
Weiterhin Anpassung der inversen Filter
$g(z) = g_0(z) + h(z) \cdot s(z^2)$ und $\tilde{h}(z) = \tilde{h}_0(z) - \tilde{g}(z) \cdot s(z^2)$ oder
$h(z) = h_0(z) + g(z) \cdot t(z^2)$ und $\tilde{g}(z) = \tilde{g}_0(z) - \tilde{h}(z) \cdot t(z^2)$

Determinante unverändert, wenn eine Zeile zur anderen addiert wird

Polyphase−Matrix

Ziel: ziehe Sub−Sampling vor Filter g und h



zerlege Filter von g und h in Koeffizienten gerader und ungerader Potenzen
$h(z) = h_e(z^2) + z^{-1} h_o(z^2)$, $g(z) = g_e(z^2) + z^{-1} g_o(z^2)$
$h_e(z^2) = (h(z) + h(-z))/2$, $h_o(z^2) = (h(z) - h(-z)) \cdot z/2$
$g_e(z^2) = (g(z) + g(-z))/2$, $g_o(z^2) = (g(z) - g(-z)) \cdot z/2$

$$P(z) = \begin{pmatrix} h_e(z) & g_e(z) \\ h_o(z) & g_o(z) \end{pmatrix}$$

$$P(z^2)^T = \tfrac{1}{2} M(z) \cdot \begin{pmatrix} 1 & z \\ 1 & -z \end{pmatrix}$$

$$P(z) \cdot \tilde{P}(z^{-1})^T = E$$

wenn Determinante der Modulationsmatrix z^{-1} ist, ist $\det(P) = 1$

euklidischer Algorithmus, Anwendung auf h_e und h_o
bestimme einen größten gemeinsamen Teiler von h_e und h_o
berechne iterativ Folge von Polynomen
$p_0 = h_e$
$p_1 = h_o$
$p_{n+1} = p_n \bmod p_{n-1}$ (Rest von p_{n+1} bei Division durch p_n)
sobald $p_n = 0$ auftritt –> Abbruch, p_{n-1} ist $ggT(h_e,h_o)$
nicht eindeutig, da Division nicht eindeutig
Algorithmus liefert außerdem Koeffizienten,
um $ggT(h_e,h_o)$ als Linearkombination von h_e und h_o darzustellen
Euklid−Zerlegung mit Matrizen geschrieben

$$\begin{pmatrix} h_e(z) \\ h_o(z) \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} p_i(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K \\ 0 \end{pmatrix}$$

erweitere auf Matrix mit Determinante 1, dadurch entstehen zwei Filter g_e^0 und g_o^0

$$P^0(z) = \begin{pmatrix} h_e(z) & g_e^0(z) \\ h_o(z) & g_o^0(z) \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} p_i(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & 1/K \end{pmatrix}$$

bildlich gesehen, müssen für jeden Faktor Kanäle vertauscht werden,
löse Überkreuzungen paarweise auf

$$P^0(z) = \begin{pmatrix} h_e(z) & g_e^0(z) \\ h_o(z) & g_o^0(z) \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n/2} \begin{pmatrix} 1 & p_{2i-1}(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p_{2i}(z) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & 1/K \end{pmatrix}$$

bereits bekannt: alle zu h passenden Filter g

lassen sich durch einen Lifting−Schritt s ineinander überführen

$$P(z) = P^0(z)\begin{pmatrix} 1 & s(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Erfolg:

Reduktion etwa auf Berechnungsaufwand eines Filters

erreicht durch Ausnutzung der Abhängigkeit von g und h

In−place Berechnungen

sofern man das Signal eines Kanals für jeden Schritt komplett ausrechnet,

benötigt man keinen zusätzlichen Speicher und kann direkt auf den Signaldaten arbeiten

Beispiel CDF−2,2

berechne zum Beispiel vom Beginn das Filterpaar (g~,h~) und

zerlege es wieder mit dem besprochenen Verfahren

$g^0(z) = 1,\ h^0(z) = z$

$s(z^2) = -(z^2 + 1)/2$

$g^1(z) = g^0(z) + s(z^2) \cdot h^0(z)$

$= 1 - (z^1+z^1)/2 = -z^1/2 + 1 - z^1/2$

$t(z^2) = (1 + z^2)/4$

$h^1(z) = h^0(z) + t(z^2) \cdot g^1(z)$

$= z + (1 + z^2)/4 \cdot (-z^1/2 + 1 - z^1/2) = -z^1/8 + 1/4 + z^1\ 3/4 + z^2/4 - z^3/8$

(g^1,h^1) ist das erzeugte Paar von Filtern

Probiere Zerlegung mit Euklid an h_e und h_o aus (beachte h_e und h_o sind vertauscht):

$g_e(z^2) = 1,\ g_o(z^2) = -1/2 - z\ 1/2$

$h_e(z^2) = 1/4 + z^2/4,\ h_o(z^2) = -1/8 + z^2\ 3/4 - z^4/8$

$h_o(z^2) = h_e(z^2) \cdot (-1/2 + z^2\ 7/2) - z^4,\ q_0(z^2) := -1/2 + z^2\ 7/2$

$h_e(z^2) = -z^4 \cdot (z^{-4}/4 + z^{-2}/4) + 0,\ q_1(z^2) := z^{-4}/4 + z^{-2}/4$

Algorithmus terminiert, $K := -z^4$

setze damit g zusammen

$g_o''(z^2) = 0,\ g_e''(z^2) = 1/K = -z^4$

$g_o'(z^2) = g_o''(z^2) \cdot q_0(z^2) + g_e''(z^2) = -z^4,\ g_e'(z^2) = g_o''(z^2) = 0$

$g_o(z^2) = g_o'(z^2) \cdot q_1(z^2) + g_e'(z^2) = -z^4 \cdot (-1/2 + z^2\ 7/2) = z^{-4}/2 - z^2\ 7/2,\ g_e(z^2) = g_o'(z^2) = -z^4$

$g^0(z) = z^{-5}/2 - z^4 - z^3\ 7/2$

$h(z) = -z^1/8 + 1/4 + z^1\ 3/4 + z^2/4 - z^3/8$

Suche $s(z^2)$ mit $g(z) = g^0(z) + h(z) \cdot s(z^2)$

mit $s(z^2) := z^{-4} \cdot 4$ erhält man zunächst $g(z) \cdot z^{-2}$, woraus sich g(z) durch Verzögern ableiten läßt

Ergebnis: Da Division nicht eindeutig, erhalten wir hier andere (längere) Lifting−Zerlegung

die Schritte sind q_0 (h−>g), q_1 (g−>h), s (h−>g)

Lifting für Kreation neuer Wavelets

ausgehend von bekanntem Wavelet

alle bisher bekannten Wavelets aufbauend auf Lazy−Wavelet erzeugbar